Journal of Economic Theory and Econometrics, Vol. 32, No. 4, Dec. 2021, 65–76

A Note on the Closed-Form Solution of the Multi-Layer CES Consumer Model*

Sungwhee Shin† Ki-Hong Choi‡

Abstract The advantages of the CES utility function in the consumer model are the generality of elasticity of substitution and the natural extension to multi-layer CES. The disadvantage is that complex calculations are required to derive a closed-form solution of the demand functions. Deriving a closed solution of the demand function from the multi-layer CES model is almost impossible due to the exponential increase in complexity. In the consumer model, there is Shephard's lemma, which induces the compensated demand by the 'partial differentiation' of the expenditure function. However, there is no such convenient tool for the market demand. This paper showed that market demand is induced by the 'logarithmic partial differentiation' of the expenditure function using the linear homogeneity of the CES function and the basic duality theory between market demand and compensated demand. This is essential for a multi-layer CES model that needs to solve both the compensated demand and the market demand simultaneously.

Keywords Multi-Layer CES Utility, Duality Theory, Self-dual, Market Demand, Compensated Demand, Household Optimization

JEL Classification D11, D14

*We thank Minsoo Cho for his help in editing the draft. We also thank two anonymous referees for helpful comments. Ki-Hong Choi thanks Korea Institue of Public Finance for a financial support. All remaining errors are our own.

†First author. School of Economics, University of Seoul, E-Mail: sungshin@uos.ac.kr

‡Corresponding author. Invited Research Fellow, Center for Fiscal Projections, Korea Institute of Public Finance, E-Mail: khchoi0810@gmail.com

Received October 4, 2021, Revised November 10, 2021, Accepted November 10, 2021

Journal of Economic Theory and Econometrics, Vol. 32, No. 4, Dec. 2021, 65–76

다층 CES 소비자 모형의 닫힌 해에 대한 소고*

신성휘† 최기홍‡

Abstract 개인의 선택 행위를 효용 최대화 또는 비용 최소화 문제로 나타내는 소비자 모형에서 효용 최대화는 시장수요(market demand) 모형, 그리고 비용 최소화는 보상수요(compensated demand) 모형이 된다. 소비자 모형에서 CES 효용함수의 장점은 대체탄력성의 일반성과 다층(multi-layer)으로의 확장이 자연스러운 것이다. 단점은 수요함수의 닫힌 해(closed-form solution)를 유도하는 데 길고 복잡한 계산이 필요한 것이다. 다층 CES 효용함수에서 수요함수의 닫힌 해를 유도하는 것은 복잡성의 기하급수적 증가로 거의 불가능에 가깝다. 소비자 모형에는 지출함수의 '편미분'으로 보상수요를 유도하는 Shephard 보조정리가 있다. 그러나 시장수요에는 그러한 편리한 도구가 없다. 본고는 CES 함수의 선형동차성과 시장수요와 보상수요 간의 기본적 쌍대이론을 이용하여 지출함수의 '대수편미분'으로 시장수요가 유도되는 것을 간명하게 보였다.

Keywords 다층 CES 함수, 쌍대이론, Self-dual, 가계최적화, 시장수요, 보상수요

JEL Classification D11, D14

*초고를 편집해준 조민수 군에게 감사드립니다. 본 논문 작성과정에 유익한 논평을 해주신 두 익명의 심사위원께도 감사드립니다. 최기홍의 연구는 한국조세재정연구원의 연구과제 "인구고령화가 거시경제와 국민연금 재정에 미치는 영향"의 일부입니다. 이 논문에 오류가 있다면 전적으로 저자들의 책임입니다.

†서울시립대학교 경제학부 교수, sungshin@uos.ac.kr

‡교신저자. 한국조세재정연구원, 조세재정전망센터, 초빙연구위원, khchoi0810@gmail.com

Received October 4, 2021, Revised November 10, 2021, Accepted November 10, 2021

1. 서론

소비자 모형은 개인의 선택 행위를 효용 최대화 또는 비용 최소화 문제로 나타내는 것이다. CES 소비자 모형은 개인의 효용함수가 CES인 경우이며 효용 최대화는 시장수요(market demand) 모형, 그리고 비용 최소화는 보상수요(compensated demand) 모형이 된다. CES 효용함수의 장점은 대체탄력성의 일반성과 다층(multiple layer)으로의 확장이 자연스러운 것이다. 단점은 수요함수의 닫힌 해(closed form solution)를 유도하는 데 길고 복잡한 계산이 필요한 것이다. 다층 CES 효용함수에서 수요함수의 닫힌 해를 유도하는 것은 복잡성의 기하급수적 증가로 거의 불가능에 가까울 것이다.

1980년대 인구고령화 문제에 대한 분석도구로 소위 A-K(Auerbach and Kotlikoff, 1987)모형이 등장했다. 이는 현대 거시경제학의 대표적 이론 모형인 중첩세대 일반균형 모형을 성공적으로 실증 모형으로 구현한 것으로 인정받고 있다. A-K 모형의 핵심은 개인들이 시간이라는 근원적 제약 하에 재화와 여가의 생애 시장수요를 결정하는 부분이다. 그러나 다루기 어려운 2층 CES 소비자 모형에 기반을 두어 닫힌 해를 사용하지 못하고 Gauss-Seidel 알고리듬에 의해 수치적으로 최적 해를 구한다. 신성휘, 최기홍 (2010, p.7)은 쌍대이론으로 2층 CES 소비자 모형의 정확한 닫힌 해를 도출하였다고 하지만 전 과정을 체계적으로 설명하지는 못했다.

소비자 모형에는 지출함수의 '편미분'으로 보상수요를 유도하는 Shephard 보조정리가 있다. 그러나 시장수요에는 그러한 편리한 도구가 없다. 본고는 CES 함수의 선형동차성과 시장수요와 보상수요 간의 기본적 쌍대이론을 이용하여 지출함수의 '대수편미분'으로 시장수요가 유도되는 것을 간명하게 보였다. 이는 보상수요와 시장수요를 동시에 풀어야 하는 다층 CES 모형에는 필수적이다. 실용적 중첩세대 일반균형 모형의 효시에 해당하는 A-K(Auerbach and Kotlikoff, 1987)모형의 가계최적화 문제는 2층 CES 소비자 모형이며 통상적으로 Gauss-Seidel 방법에 의해 수치적으로 처리된다. 본고는 시범적으로 이 가계최적화 문제를 보상수요에 해당하는 1층은 CES 지출함수의 편미분으로, 시장수요에 해당하는 2층 CES 지출함수의 대수편미분으로 단계적이고 간명하게 유도한다.

다음 2절에서는 CES 소비자 모형에서 효용함수와 비용함수 간의 유사한 함수형태에 대한 'self-dual' (Sato, 1976)에 대한 간단한 설명을 제시하고 소비자 모형의 쌍대문제(duality problem) 이론으로부터 시장수요 보조정리를 두 가지 방법으로 증명한다. 다음 3절에서는 A-K 모형의 2층 CES 효용함수에 기초한 가계최적화 문제의 닫힌 해를 Shephard 또는 보상수요 보조정리와 본

고의 시장수요 보조정리에 의해 체계적으로 유도한다. 마지막 4절은 간단한 요약을 제시한다.

2. 쌍대이론과 CES 소비자 모형의 수요함수

2.1. CES 효용함수의 지출함수

효용함수는 재화 수량의 함수이며, 지출함수는 그 재화 가격의 함수이다. 효용함수와 지출함수가 선형동차의 동일한 함수인 경우 그 둘은 self-dual 이라고 하며(Sato, 1976; Theil, 1980) CES 효용함수가 대표적이다. 선형동차 CES 효용함수와 CES 단위 지출함수 또는 단위 비용함수 간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) &= \left(a_1 x_1^{1-1/\sigma} + a_2 x_2^{1-1/\sigma}\right)^{1/(1-1/\sigma)} \\ e(p_1,p_2;1) &= \left(a_1^{\sigma} p_1^{1-\sigma} + a_2^{\sigma} p_2^{1-\sigma}\right)^{1/(1-\sigma)} \end{aligned} \tag{1}$$

위에서 효용함수의 x_i는 수량, 단위 지출함수의 p_i는 가격이다. 기호체계는 Varian (1992)을 따랐으며, 두 식의 모수들을 비교하면 CES 효용함수에서 수량의 계수가 a_i, 대체탄력성이 σ이면 CES 단위 지출함수에서 가격의 계수는 a_i^{σ}, 대체탄력성은 $1/\sigma$의 함수 관계가 있다.

CES 소비자 모형의 보상수요에는 지출함수의 가격에 대한 편미분으로 간편하게 보상수요를 유도할 수 있는 Shephard 보조정리가 있다. 그러나 소비자 모형에서 보다 중요한 시장수요에는 Shephard 보조정리와 같은 편리한 도구가 없다. 그러나 쌍대이론에 의하면 CES 효용함수와 같은 선형동차 함수에는 시장수요를 Shephard 보조정리와 같이 간편하게 유도할 수 있는 보조정리가 존재한다.

2.2. 수요함수의 쌍대이론

소비자 모형의 시장수요와 보상수요는 다음 최대화 문제 식 (2)와 최소화 문제 식 (3)의 해로 각각 정의되며 $\mathrm{x}(\mathrm{p},m)$과 $\mathrm{h}(\mathrm{p},u)$로 나타낸다. 식에서 p는 재화의 가격 벡터, m과 u는 각각 예산과 효용의 스칼라이며 외생변수이다. $v(\mathrm{p},m)$와 $e(\mathrm{p},u)$는 최대화된 효용과 최소화된 지출을 각각 나타내며 간접효용함수와 지출함수로 명명된다.

$$v(\mathrm{p},m) \equiv \max_{s.t.\,\mathrm{p}\cdot\mathrm{x}\leq m} u(\mathrm{x}) \tag{2}$$

$$e(\mathrm{p},u) \equiv \min_{s.t.\,u(\mathrm{h})\geq u} \mathrm{p}\cdot\mathrm{h} \tag{3}$$

Deaton and Muellbauer (1980, p.37)는 다음 식 (4)의 관계가 성립하면 두 최적화 문제의 해 시장수요와 보상수요가 동일한, $\mathrm{x}(\mathrm{p},m) = \mathrm{h}(\mathrm{p},u)$ 쌍대문제 (dual problem)가 된다고 하였다. Varian (1992, p.113)과 Luenberger (1995, pp. 108-109)은 연속성, 해의 존재, 등을 만족하는 평범한 효용함수들에서 쌍대문제에 대한 직관적이거나 비교적 엄밀한 증명을 소개하고 있다.

$$u = v(\mathrm{p},m) \;\&\; m = e(\mathrm{p},u) \tag{4}$$

시장수요와 보상수요가 동일해지는 쌍대문제의 필요조건 식 (4)에 의하면 다음 4가지 항등식은 자명하다. Varian (1992, p.106)은 다음 네 가지 식을 쌍대문제의 “important identities”로 지칭하였으며 특히 관찰되지 않은 보상수요와 관찰되는 시장수요를 연결하는 식 (8)의 중요성을 강조하였다. 한편, Luenberger (1995, p.109)는 식 (5)와 (6)을 “algebraic way to express the relations” 이라고 하여 쌍대문제의 기본 항등식으로 보았다.

$$e(\mathrm{p},v(\mathrm{p},m)) \equiv m \tag{5}$$

$$v(\mathrm{p},e(\mathrm{p},u)) \equiv u \tag{6}$$

$$\mathrm{x}(\mathrm{p},m) \equiv \mathrm{h}(\mathrm{p},v(\mathrm{p},m)) \tag{7}$$

$$\mathrm{h}(\mathrm{p},u) \equiv \mathrm{x}(\mathrm{p},e(\mathrm{p},u)) \tag{8}$$

2.3. CES 소비자 모형의 시장수요

본고는 앞서 쌍대이론으로부터 소비자 모형에서 시장수요에 대해 Shephard 보조정리와 유사한 역할을 하는 새로운 보조정리를 제시하고 시장수요 보조정리라고 명명한다.

<u>시장수요 보조정리</u>

효용함수가 선형동차이며 대응하는 단위 지출함수가 $e(\mathrm{p},1)$로 주어지면 다음과 같이 단위 시장수요는 단위 지출함수의 대수편미분으로 결정된다.

$$\mathrm{x}(\mathrm{p},1) = \bigtriangledown_{\mathrm{p}} \log e(\mathrm{p},1) \tag{9}$$

(증명 1)

쌍대문제의 항등식 (8)을 선형동차성을 이용하여 변형하면 다음과 같다. 항등식 (7)을 사용할 경우 식 (5) 또는 식 (6) 항등식에 의한 $e(\mathrm{p},1) = 1/v(\mathrm{p},1)$의 관계를 추가적으로 적용하면 동일한 결과를 얻는다.

$$\mathrm{x}(\mathrm{p},1) = \mathrm{h}(\mathrm{p},1)\frac{1}{e(\mathrm{p},1)} \tag{10}$$

식 (10)의 우변에 Shephard 보조정리 또는 본고의 보상수요 보조정리 $\mathrm{h}(\mathrm{p},1) = \bigtriangledown_{\mathrm{p}} e(\mathrm{p},1)$들 대입하여 변형하면 다음과 같이 대수편미분으로 나타난다.

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(\mathrm{p},1) &= \mathrm{h}(\mathrm{p},1)\frac{1}{e(\mathrm{p},1)} \\ &= \bigtriangledown_{\mathrm{p}} e(\mathrm{p},1)\frac{1}{e(\mathrm{p},1)} \\ &= \bigtriangledown_{\mathrm{p}} \log e(\mathrm{p},1) \end{aligned} \tag{11}$$

■

(증명 2)

통상적으로 시장수요 함수는 Roy 항등식으로 유도된다. 먼저 선형동차를 이용하면 Roy 항등식은 다음과 같이 단순화된다.

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(\mathrm{p},m) &\equiv -\frac{\bigtriangledown_{\mathrm{p}} v(\mathrm{p},m)}{\bigtriangledown_{m} v(\mathrm{p},m)} \\ &= -\frac{\bigtriangledown_{\mathrm{p}} v(\mathrm{p},m)}{v(\mathrm{p},1)} \end{aligned} \tag{12}$$

위의 식에 $m = 1$을 대입하고 앞서 쌍대문제의 항등식 (5) 또는 (6)에 의한 $e(\mathrm{p},1) = 1/v(\mathrm{p},1)$의 관계를 적용하면 다음과 같이 대수편미분이 나타난다.

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(\mathrm{p},1) &\equiv -\frac{\bigtriangledown_{\mathrm{p}} 1/e(\mathrm{p},1)}{1/e(\mathrm{p},1)} \\ &= -\frac{-1/e(\mathrm{p},m)^2 \bigtriangledown_{\mathrm{p}} e(\mathrm{p},1)}{1/e(\mathrm{p},1)} \\ &= \bigtriangledown_{\mathrm{p}} \log e(\mathrm{p},1) \end{aligned} \tag{13}$$

■

따라서 본고의 시장수요 보조정리에는 최소 두 개의 증명이 존재한다. 그러나 Roy 항등식도 역시 쌍대이론에 의해 유도된다는 점에서 (e.g., Varian (1992, pp.106-107)) 쌍대문제의 조건, 식 (4)만으로 유도되는 증명 1을 대표 증명으로 본다. 종합하면 CES 함수의 선형동차성에 의하면 보상수요와 시장수요의 닫힌 해는 각각 다음과 같이 대응하는 CES 지출함수의 편미분과 대수편미분으로부터 유도된다.

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(\mathrm{p},u) &= \bigtriangledown_{\mathrm{p}} e(\mathrm{p},1) \times u \\ \mathrm{x}(\mathrm{p},m) &= \bigtriangledown_{\mathrm{p}} \log e(\mathrm{p},1) \times m \end{aligned} \tag{14}$$

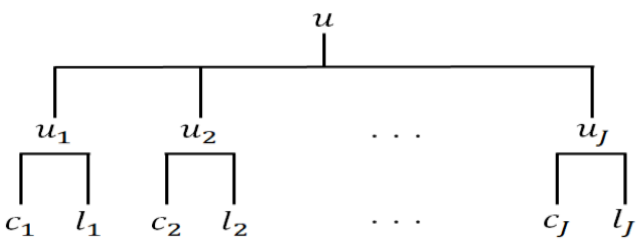
3. A-K 모형 생애최적화의 닫힌 해

3.1. A-K 모형의 생애최적화 문제

Auerbach and Kotlikoff (1987)의 중첩세대 일반균형 모형은 각 세대를 대표하는 개인들의 생애효용 극대화에 기초한다. 생애효용은 다음과 같은 2층 구조 효용나무(Strotz, 1959)로 나타낼 수 있다. 1층에는 연령효용 CES 함수 u_j, 그리고 2층에는 생애효용 CES 함수 u가 놓인다. 생애 $j = 1,2,\cdots,J$에서 1은 현실에서 경제활동을 시작하는 20세, J는 최적화 시점의 기대여명을 나타낸다.

1층 연령효용 u_j는 재화 c_j와 여가 l_j의 CES 함수이며 다음 식과 같다. CES 함수의 모수 ε은 소비와 여가 간의 대체탄력성, 모수 α는 여가의 상대적 선호 정도를 나타낸다.

그림 1: 2층 CES 효용의 구조



$$u_j = \left(c_j^{1-1/\varepsilon} + \alpha l_j^{1-1/\varepsilon}\right)^{1/(1-1/\varepsilon)} \tag{15}$$

2층 생애효용 u는 연령효용 u_j의 CES 합성함수이다. 함수의 모수 γ은 기간 대체탄력성, 모수 β_j는 시간선호율 δ에 의한 연령효용의 심리적 할인율이다. 할인의 기준 시점은 생애 최적화를 하는 영(0) 이다.

$$u = \left(\sum_{j=1}^{J} \beta_j u_j^{1-1/\gamma}\right)^{1/(1-1/\gamma)}, \ \beta_j \equiv \frac{1}{(1+\delta)^j} \tag{16}$$

다음은 예산제약식이며 효용함수와 함께 최적화 문제를 구성한다. 예산제약식 부등호의 좌변에 지출 또는 비용, 그리고 우변에는 예산이 놓인다. 좌변에서 s_j는 재화 c_j의 가격, w_j는 여가 l_j의 기회비용에 해당하는 임금, 그리고 d_j는 모든 비용을 생애 최적화 시점 영(0)으로 전환하는 이자율 r_k에 의한 재무적 할인율이다. 우변은 개인의 생애 시간부존자원(time endowment)의 최적화 시점 0의 값이며 m으로 나타낸다.

$$\sum_{j=1}^{J} d_j(s_j c_j + w_j l_j) \leq m; \quad m \equiv \sum_{j=1}^{J} d_j w_j, \ d_j = \prod_{k=1}^{j} \frac{1}{1+r_k} \tag{17}$$

3.2. 생애 최적화의 풀이

본고의 풀이를 조망하면 먼저 1층 연령효용의 J개 연령별 최적화 문제를 풀고, 그 결과를 반영하여 2층생애 최적화 문제를 푸는 2단계 상향식이다. 먼저 1단계는 연령효용 u_j를 최소비용으로 얻는 다음의 최적화 문제이다.

$$\begin{aligned} e_j(s_j,w_j;u_j) \equiv & \min s_j c_j + w_j l_j \\ & \textit{such that} (c_j^{1-1/\varepsilon} + \alpha l_j^{1-1/\varepsilon})^{1/(1-1/\varepsilon)} \geq u_j, \quad j = 1,2,\cdots,J \end{aligned} \tag{18}$$

위에서 $e_j(s_j,w_j;u_j)$는 연령효용 u_j의 최소비용을 나타내는 지출함수 또는 비용함수이다. 그러나 CES 효용의 지출함수는 CES 함수이며 식 (1)의 self-dual 함수 형태에 의해 다음과 같이 결정되며 단위지출 또는 단위비용(unit cost), $e_j(s_j,w_j;1)$과 u_j의 곱으로 나타난다. 단위비용은 연령효용의 가격에 해당하며 p_j로 나타낸다.

$$\begin{aligned} e_j(s_j,w_j;u_j) &= (s_j^{1-\varepsilon} + \alpha^{\varepsilon} w_j^{1-\varepsilon})^{1/(1-\varepsilon)} \times u_j \\ &= p_j \times u_j \qquad j = 1,2,\cdots,J \end{aligned} \tag{19}$$

재화와 여가의 최적 조합 $c_j(s_j,w_j;u_j)$와 $l_j(s_j,w_j;u_j)$은 Shephard 보조정리에 의하면 다음과 같이 편미분으로 결정된다.

$$\begin{aligned} c_j &= c_j(s_j,w_j;u_j) = \frac{\partial p_j}{\partial s_j} \times u_j = \left(\frac{p_j}{s_j}\right)^{\varepsilon} u_j \\ l_j &= l_j(s_j,w_j;u_j) = \frac{\partial p_j}{\partial w_j} \times u_j = \left(\frac{\alpha p_j}{w_j}\right)^{\varepsilon} u_j, \qquad j = 1,2,\cdots,J \end{aligned} \tag{20}$$

남은 과제는 2층 생애 최적화 문제에서 연령효용 u_j을 구하는 것이다. 이제 식 (18)과 식 (19)를 종합하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\min s_j c_j + w_j l_j \equiv e_j(s_j,w_j;u_j) = p_j u_j, \qquad j = 1,2,\cdots,J \tag{21}$$

이제 1층 최적화의 결과를 이용하면 가계의 연령별 재화와 여가의 최적

조합의 비용 $s_jc_j + w_jl_j$는 최소값 p_ju_j이다. 이를 대입하면 생애 예산제약식 식 (17)은 다음과 같이 단순화되며 $q_j \equiv d_jp_j$는 최적화 시점 (0)의 가격으로 해석된다.

$$\sum_{j=1}^{J} d_jp_ju_j = \sum_{j=1}^{J} q_ju_j \le m; \qquad q_j = d_jp_j \tag{22}$$

이들을 반영한 다음 2층 생애효용 극대화는 주어진 예산제약 m하에서 연령효용 u_j의 최적 배분 또는 시장수요의 문제이다. 이 문제의 해는 앞서 시장수요 보조정리에 의하면 이 문제의 효용함수에 대응하는 지출함수의 대수편미분으로 간편하게 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\max \left(\sum_{j=1}^{J} \beta_j u_j^{1-1/\gamma} \right)^{1/(1-1/\gamma)} \\ &\textit{such that} \sum_{j=1}^{J} q_ju_j \le m \end{aligned} \tag{23}$$

이 문제의 CES 생애효용에 대응하는 단위 지출함수는 self-dual 함수형태에 의해 다음과 같다.

$$p_u \equiv e(\mathrm{q}, 1) = \left(\sum_{j=1}^{J} \beta_j^{\gamma} q_j^{1-\gamma} \right)^{1/(1-\gamma)} \tag{24}$$

앞서 시장수요 보조정리에 의하면 연령효용의 시장수요 $u_j(p,m)$는 다음과 같이 대수편미분으로 간단히 풀린다.

$$u_j(\mathrm{q}, m) = \frac{\partial \log p_u}{\partial q_j} \times m = \left(\frac{\beta_j p_u}{q_j} \right)^{\gamma} \frac{m}{p_u} \qquad j = 1, 2, \cdots, J \tag{25}$$

따라서 식 (20)에 식 (25)를 대입하면 재화와 여가의 시장수요는 다음과 같으며, 신성휘, 최기홍 (2010, p.7)과 정확히 같다. 이들 닫힌 해와 Gauss-Seidel 알고리듬에 의한 수치적 해의 동일함을 당시 중첩세대 일반균형 모형으로 확

인한 바 있다. 다음 최종 닫힌 해의 구조를 보면 최적해는 문제의 모든 모수들, 그리고 그들의 함수인 두 지출함수의 곱이다.

$$c_j = c_j(s_j, w_j; m) = \left(\frac{p_j}{s_j}\right)^{\varepsilon} \left(\frac{\beta_j p_u}{d_j p_j}\right)^{\gamma} \frac{m}{p_u} \tag{26}$$

$$l_j = l_j(s_j, w_j; m) = \left(\frac{\alpha p_j}{w_j}\right)^{\varepsilon} \left(\frac{\beta_j p_u}{d_j p_j}\right)^{\gamma} \frac{m}{p_u} \tag{27}$$

4. 결론

본고는 소비자의 효용함수가 선형동차인 경우 시장수요(market demand)는 지출함수의 ‘대수편미분’으로 나타남을 소비자 모형의 쌍대이론으로 증명하였다. 이는 보상수요(compensated demand)가 지출함수의 ‘편미분’으로 유도되는 것에 대응한다. 이는 CES 효용함수가 self-dual (Sato, 1976; Theil, 1980) 성질을 가져서 대응하는 지출함수가 일정한 규칙의 동일한 CES 함수인 것과 함께 함께 CES 소비자 모형을 매우 편리하게 다룰 수 있게 한다. 특히 Auerbach-Kotlikoff 모형과 같이 시장수요와 보상수요가 동시에 사용되는 다층 CES 소비자 모형에는 본고의 접근법이 필수적이다.

References

신성휘, 최기홍 (2010). "중첩세대 동태 일반균형 모형에 의한 국민연금 재정 정책의 세대내, 세대간 후생변화 분석," *경제분석* 제 16권, 제2호, 1-46.

Arrow, K.J., Chenery, H.B., Minhas, B.S., and R.M. Solow (1961). "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," *Review of Economics and Statistics* 43(3), 225-250.

Auerbach, A. and J. Kotlikoff (1987). *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press.

Deaton, A. and J. Muellbauer (1980). *Economics and Consumer Behavior,* Cambridge University Press.

Feenstra, R. (1994). "New Product Varieties and the Measurement of International Prices," *American Economic Review* 84(1), 157-177.

Luenberger, D.G. (1995). *Microeconomic Theory,* McGraw-Hill.

Sato, K. (1967). "A Two-Level CES Production Function," *Review of Economic Studies* 34(2), 201-2018.

Sato, R. (1976). "Self-Dual Preferences," *Econometrica* 44(5), 1017-1032.

Silverberg, E. and W. Suen (2001), *The Structure of Economics-A Mathematical Analysis,* Vol. 3, McGraw-Hil.

Strotz, R.H. (1959). "The Utility Tree – A Correction and Further Appraisal," *Econometrica* 27(3), 482-488.

Theil, H. (1980). *The System-Wide Approach to Microeconomics*, The University of Chicago Press.

Varian, H. (1992). *Microeconomic Analysis*, Vol. 3, New York: Norton.